

7.5.9 Obecná rovnice elipsy

Předpoklady: 7508

Př. 1: Najdi střed, vrcholy a ohniska elipsy dané rovnicí $(x-2)^2 + 4(y+1)^2 = 1$.

Rovnici upravíme do správného tvaru: $\frac{(x-2)^2}{1} + \frac{(y+1)^2}{\frac{1}{4}} = 1$.

Z rovnice víme: $S[2; -1]$, $a=1$, $b=\frac{1}{2} \Rightarrow$ „ležatá“ elipsa

Excentricita: $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hlavní vrcholy: $A[3; -1]$, $B[1; -1]$.

Vedlejší vrcholy: $C[2; -0,5]$, $D[2; -1,5]$.

Ohniska: $E\left[2 + \frac{\sqrt{3}}{2}; -1\right]$, $F\left[2 - \frac{\sqrt{3}}{2}; -1\right]$.

Stejně jako u kružnice můžeme ve středové rovnici roznásobit závorky (a odstranit zlomky):

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \quad / \cdot a^2 b^2$$

$$b^2(x-m)^2 + a^2(y-n)^2 = a^2 b^2$$

$$b^2(x^2 - 2mx + m^2) + a^2(y^2 - 2ny + n^2) = a^2 b^2$$

$$b^2 x^2 - 2b^2 mx + m^2 b^2 + a^2 y^2 - 2a^2 ny + n^2 a^2 = a^2 b^2$$

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - 2b^2 mx - 2a^2 ny + m^2 b^2 + n^2 a^2 - a^2 b^2 = 0$$

Tento tvar se většinou používá s jiným označením koeficientů:

$px^2 + qy^2 + 2rx + 2sy + t = 0$ - **obecná rovnice elipsy** (ne každá takováto rovnice je rovnicí elipsy, podobně jako u kružnice)

Bez zpětné úpravy nikdo nepozná, o jakou elipsu jde, ani zda je to vůbec elipsa.

Př. 2: U elipsy dané rovnicí $4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$ najdi střed a urči velikosti poloos.

Rovnici musíme upravit do středového tvaru:

$$4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 4x^2 - 8x + y^2 + 4y + 4 = 0$$

$$4(x^2 - 2x) + y^2 + 2 \cdot 2y + 2^2 - 2^2 + 4 = 0$$

$$4(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + (y + 2)^2 - 2^2 + 4 = 0$$

$$4(x-1)^2 + (y+2)^2 - 4 \cdot 1^2 - 2^2 + 4 = 0$$

$$4(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$$

$$(x-1)^2 + \frac{(y+2)^2}{4} = 1 \quad \text{můžeme psát i jako: } \frac{(x-1)^2}{1} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1.$$

Elipsa má střed v bodě $S[1; -2]$, hlavní poloosa je $b = 2$, vedlejší poloosa je $a = 1$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je nutné dělat napůl u tabule (jde o vytýkání před závorky a hlavně o jejich roznásobování), zbytek hodiny je určen samostatné práci.

Př. 3: Úpravou na středový tvar rozhodni, které z uvedených rovnic jsou rovnicí elipsy. U všech nalezených elips urči poloosy, střed (v případě dostatku času i souřadnice vrcholů a ohnisek).

a) $4x^2 + 9y^2 + 16x - 18y - 11 = 0$

b) $x^2 + 4y^2 + 6x - 16y + 16 = 0$

c) $9x^2 + 4y^2 - 18x - 8y + 14 = 0$

d) $25x^2 + 16y^2 - 100x + 32y + 115 = 0$

e) $x^2 + 3x + 3y^2 = 0$

a) $4x^2 + 9y^2 + 16x - 18y - 11 = 0$

$$4(x^2 + 4x) + 9(y^2 - 2y) - 11 = 0$$

$$4(x^2 + 2x \cdot 2 + 2^2 - 2^2) + 9(y^2 - 2y + 1^2 - 1^2) - 11 = 0$$

$$4(x+2)^2 - 4 \cdot 2^2 + 9(y-1)^2 - 9 \cdot 1^2 - 11 = 0$$

$$4(x+2)^2 + 9(y-1)^2 = 36 \quad /:36$$

$$\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \Rightarrow \text{„ležatá“ elipsa.}$$

$$S[-2; 1], \quad a = 3, \quad b = 2, \quad e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

Hlavní vrcholy (posunuté od středu o a ve vodorovném směru): $A[1; 1], B[-5; 1]$.

Vedlejší vrcholy (posunuté od středu o b ve svislém směru): $C[-2; 3]; D[-2; -1]$.

Ohniska (posunutá od středu o e ve vodorovném směru): $F[-2 + \sqrt{5}; 1], E[-2 - \sqrt{5}; 1]$.

b) $x^2 + 4y^2 + 6x - 16y + 16 = 0$

$$x^2 + 2x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 4(y^2 - 4y) + 16 = 0$$

$$(x+3)^2 - 3^2 + 4(y^2 - 2y \cdot 2 + 2^2 - 2^2) + 16 = 0$$

$$(x+3)^2 - 3^2 + 4(y-2)^2 - 4 \cdot 2^2 + 16 = 0$$

$$(x+3)^2 + 4(y-2)^2 = 9 \quad /:9$$

$$\frac{(x+3)^2}{9} + 4 \frac{(y-2)^2}{9} = 1 \quad \text{Ještě musíme 4 před druhým zlomkem přesunout do jmenovatele.}$$

$$\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{\frac{9}{4}} = 1 \Rightarrow \text{„ležatá“ elipsa.}$$

$$S[-3; 2], \quad a = 3, \quad b = \frac{3}{2}, \quad e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

Hlavní vrcholy (posunuté od středu o a ve vodorovném směru): $A[0;2]$, $B[-6;2]$.

Vedlejší vrcholy (posunuté od středu o b ve svislém směru): $C\left[-3;\frac{7}{2}\right]$; $D\left[-3;\frac{1}{2}\right]$.

Ohniska (posunutá od středu o e ve vodorovném směru): $F\left[-3+\frac{3}{2}\sqrt{3};2\right]$, $E\left[-3-\frac{3}{2}\sqrt{3};2\right]$.

c) $9x^2 + 4y^2 - 18x - 8y + 14 = 0$

$$9(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + 4(y^2 - 2y + 1^2 - 1^2) + 14 = 0$$

$$9(x-1)^2 - 9 \cdot 1 + 4(y-1)^2 - 4 \cdot 1 + 14 = 0$$

$9(x-1)^2 + 4(y-1)^2 = -1 \Rightarrow$ Nejde o rovnici elipsy, této rovnici nevyhovuje žádný bod roviny (pro všechny body roviny je levá strana nezáporná).

d) $25x^2 + 16y^2 - 100x + 32y + 115 = 0$

$$25(x^2 - 4x) + 16(y^2 + 2y) + 115 = 0$$

$$25(x^2 - 2x \cdot 2 + 2^2 - 2^2) + 16(y^2 + 2y + 1^2 - 1^2) + 115 = 0$$

$$25(x-2)^2 - 25 \cdot 2^2 + 16(y+1)^2 - 16 \cdot 1^2 + 115 = 0$$

$$25(x-2)^2 + 16(y+1)^2 = 1 \quad \text{Nemůžeme dělit (musíme čísla převést do jmenovatelů).}$$

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{1}{25}} + \frac{(y+1)^2}{\frac{1}{16}} = 1 \Rightarrow \text{„stojatá“ elipsa.}$$

$$S[2;-1], \quad a = \frac{1}{5}, \quad b = \frac{1}{4}, \quad e = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{400}} = \frac{3}{20}.$$

Hlavní vrcholy (posunuté od středu o b ve svislém směru): $C\left[2;-\frac{3}{4}\right]$; $D\left[2;-\frac{5}{4}\right]$.

Vedlejší vrcholy (posunuté od středu o a ve vodorovném směru): $A\left[\frac{11}{5};-1\right]$, $B\left[\frac{9}{5};-1\right]$.

Ohniska (posunutá od středu o e ve svislém směru): $F\left[2;-\frac{17}{20}\right]$, $E\left[2;-\frac{23}{20}\right]$.

e) $x^2 + 3x + 3y^2 = 0$

$$x^2 + 2x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3y^2 = 0$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 3y^2 = \frac{9}{4} \quad /: \frac{9}{4}$$

$$\frac{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}} + \frac{y^2}{\frac{3}{4}} = 1 \Rightarrow \text{„ležatá“ elipsa.}$$

$$S\left[\frac{3}{2}; 0\right], a = \frac{3}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{2}, e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Hlavní vrcholy (posunuté od středu o a ve vodorovném směru): $A[3; 0]$, $B[0; 0]$.

Vedlejší vrcholy (posunuté od středu o b ve svislém směru): $C\left[\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$; $D\left[\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Ohniska (posunutá od středu o e ve vodorovném směru): $F\left[\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}; 0\right]$, $E\left[\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}; 0\right]$.

Pedagogická poznámka: Největším problémem jsou body b) a d), kde studenti končí

s rovnicí $\frac{(x+3)^2}{9} + 4\frac{(y-2)^2}{9} = 1$ ($25(x-2)^2 + 16(y+1)^2 = 1$) a neupravují ji dál.

Př. 4: Petáková:
strana 128/cvičení 75 b) d) e) f)

Shrnutí: Středová i obecná rovnice elipsy je podobná odpovídající rovnici kružnice. Analogicky také převádíme jednu na druhou.